05-11-2019

Διάλεξη 5η

Πραγματική Ανάλυση

Θεώρημα: $A \subseteq X$ συμπαγές αν και μόνο αν κάθε $\{x_n\} \subseteq A$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο A.

Πρόταση: Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς είναι συμπαγές.

Θεώρημα: Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ τότε κάθε ανοιχτή κάλυψη ανάγεται σε το πολύ αριθμήσιμη.

Απόδ.

Ισχύει $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ (δηλαδή $\mathbb{Q}^n$ πυκνό στο $\mathbb{R}^n$)

Έστω $x \in A$, $\exists\, i_x \in I$ τ.ω $x \in A_{i_x}$. Τότε $\boxed{x \in B(a_x, r_x) \subseteq A_{i_x}}$: (1)

$\exists\, a_x \in \mathbb{Q}^n$, $r_x > 0$ τ.ω

Παίρνω την οικογένεια: $\{B(a_x, r_x),\ x \in A\} = \mathcal{F}$ η οποία είναι το πολύ αριθμήσιμη. Έτσι από

(1) έχω: $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(a_x, r_x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup A_i$

Όμως $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists\, A_i \in \mathcal{A}$ τ.ω $B_i \subseteq A_i$ $(\longleftrightarrow)$

Θεώρημα (Λήμμα Urysohn): Έστω $C_1, \dots, C_2$ κλειστά υποσύνολα του (X, d) με $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Τότε $\exists\, f: X \to [0,1]$ τ.ω

i) f: συνεχής

ii) $f|_{C_1} \equiv 0$

iii) $f|_{C_2} \equiv 1$.

Ορισμός: Έστω $f: (X, d) \to (Y, \rho)$. Η f είναι ομοιόμ. συνεχής αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ τ.ω $\forall x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$, $x \in X$: $d(x,A) = \inf\{d(x,y), y \in A\}$ (2)

Πρόταση: Η $f(x) = d(x,A)$, $x \in X$ είναι ομοιομ. συνεχής

Απόδ

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon/2$. Έστω $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta = \varepsilon/2$

Από τον ορισμό του inf έχουμε ότι:

$\exists\, a \in A$ τ.ω $d(x,a) < d(x,A) + \varepsilon/2 \Rightarrow f(x) > d(x,a) - \varepsilon/2$

$\exists\, B \in A$ τ.ω $d(y,B) < d(y,A) + \varepsilon/2 \Rightarrow f(y) > d(y,B) - \varepsilon/2$

$$f(y) = d(y,A) \le d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon/2 + d(x,A) + \varepsilon/2 < \varepsilon + f(x)$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) < \varepsilon/2$

όμοια $f(x) - f(y) < \varepsilon/2$ $\Big\}$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχής

Λήμμα: Έστω $C \subseteq X$ κλειστό και $x \notin C$ τότε $d(x,C) > 0$

Απόδ

Έστω ότι $d(x,C) = 0 \Rightarrow \exists \{y_n\} \subseteq C$ τ.ω $d(x,y_n) \to 0$

$\Rightarrow y_n \to x \overset{\text{C κλειστό}}{\Longrightarrow} x \in C$: άτοπο//

Απόδειξη Λήμμα Urysohn:

Ορίζω $f: X \to \mathbb{R}$ τ.ω $f(x) = \dfrac{d(x,C_1)}{d(x,C_1) + d(x,C_2)}$

- Αν $x \notin C_i \Rightarrow d(x,C_i) > 0$, $i = 1,2$

$C_1 \cap C_2 = \emptyset \Longrightarrow d(x,C_1) + d(x,C_2) > 0$, $\forall x \in X$

- Αφού ο αριθμητής είναι πάντα μικρότερος του παρονομαστή έχουμε $f(x) \subseteq [0,1]$

Επίσης έχουμε f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

- Έστω $x \in C_1 \Rightarrow d(x,C_1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in C_2 \Rightarrow d(x,C_2) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

Ορισμοί: 1) (X,d) μ.χ.

2) $C(X)$: χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$.

3) $B(X)$: χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$

4) $C_b(X)$: χώρος όλων των συνεχών φραγμένων συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$.

5) $F(X)$: χώρος όλων των συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$

$F(X) \to$ Γραμμικός χώρος.

Επίσης $C(X), B(X), C_b(X)$ υπόχωροι του $F(X)$ διότι αν $f, g \in C(X), B(X), C_b(X)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\lambda f, f+g \in F(X)$

Ορισμός: $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$.

Τι σημαίνει; $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ ($\kappa.\sigma.$ = κατά σημείο)

↳ σημαίνει: $f_n \to f$, $\forall$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $\forall x \in X$

Έχω σταθεροποιήσει ένα x οπότε έχω μια ακολουθία αριθμών.

Παράδειγμα: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$

τότε
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0,1) \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ όχι συνεχής.

Ορισμός: Η f_n συγκλίνει στην f κατά σημείο $(f_n(x) \to f)$, $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ορισμός: Η f_n συγκλίνει στην f ομοιόμορφα αν

(2) $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\forall x\in X): |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Σχόλιο: Η διαφορά του ορισμού (1) από τον ορισμό (2) είναι ότι στον (2) το $n_0\in\mathbb{N}$ που βρίσκουμε είναι το ίδιο για όλα τα $x\in X$ πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στον (1).

Θεώρημα: Αν $\{f_n\}\subseteq C(X)$: $f_n \xrightarrow{ομ} f$ τότε $f\in C(X)$.

Απόδ.

Έστω $a\in X$. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $f_n\to f$ ομοιομ. έχουμε: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3, \forall x\in X$
$(\exists n_0\in\mathbb{N})$ τ.ω $\forall n\geq n_0$

Επίσης: f_{n_0} συνεχής στο a $\Rightarrow \exists\delta>0$ τ.ω
$x\in B(a,\delta)$: $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)|<\varepsilon/3$

Άρα έχουμε: $\forall x\in B(a,\delta)$:

$$|f(x)-f(a)| = |(f(x)-f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)) + f_{n_0}(a)-f(a)|$$
$$\leq |f(x)-f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a)-f(a)|$$
$$\leq \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

$\Rightarrow$ f συνεχής στο $\forall a\in X$.

Ορισμός: Έστω V πραγματικός γραμμικός χώρος.

Η απεικόνιση $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ ονομάζεται νόρμα αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\|x\|\geq 0$ και $\|x\|=0 \iff x=0$
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

$\forall x,y\in V$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Για $V=B(X)$, $\|f\|=\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|, x\in X\}<\infty$

$\downarrow$

ομοιόμορφη νόρμα.

Πρόταση: $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα πάνω στον $B(X)$.

Απόδ

Για να είναι νόρμα πρέπει να ισχύουν οι 3 ιδιότητες

(i) → τετριμμένη

(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in X\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)|, x \in X\}$
$= |\lambda| \sup\{|f(x)|, x \in X\}$
$= |\lambda| \, \|f\|_\infty$

Άρα (ii): ισχύει

(iii) $\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in X\}$
$\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}$
$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

άρα (iii) ισχύει

Άρα $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $B(X)$.

- Μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|$: $d(x,y) = \|x-y\|$
- D: μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$ στον $B(X)$.

▶ Έστω $(B(X), D)$ μ.χ. Τότε:

- $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ}} f \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in X$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $(\forall n \geq n_0)$ $\sup|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $(\forall n \geq n_0)$: $\underbrace{\|f_n(x) - f(x)\|}_{= D(f_n, f)} \leq \varepsilon$

$\implies f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ}} f \implies f_n \xrightarrow{D} f$

- Αν $f_n \xrightarrow{D} f \implies (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$
$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} < \varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\implies f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ}} f$.

! Συγκεντρωτικά: $f_n \xrightarrow{D} f \iff f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ}} f$

- $(C(X), D)$ → δεν είναι μ.χ. διότι

$D(f,0) = \|f-0\|_\infty = \|f\|_\infty \in [0,\infty)$

- X συμπαγής $\Rightarrow C(X) \subseteq B(X)$

επειδή αν X συμπαγής και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\Rightarrow f(X)$ συμπαγής